解答

（1） $2\sin 2x=\sqrt{2}$ より $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ここで，$0\leqq x\leqq \pi$ より $0\leqq 2x\leqq 2\pi$ だから

$2x=\dfrac{1}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi$ よって $x=\dfrac{1}{8}\pi,\ \dfrac{3}{8}\pi$

（2） $2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\sqrt{6}$ より $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで，$0\leqq x\leqq \pi$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ だから

$\dfrac{1}{3}\pi\leqq x+\dfrac{1}{4}\pi\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ よって $\dfrac{1}{12}\pi\leqq x\leqq\dfrac{5}{12}\pi$

（3） $t=\sin x+\cos x$ の両辺を 2 乗すると

$t^2=1+2\sin x\cos x$ よって $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)\cdots①$

2 倍角の公式より $A=2\cdot 2\sin x\cos x=4\sin x\cos x\cdots②$

①②より $A=4\cdot\dfrac{1}{2}(t^2-1)=2t^2-2$

また加法定理および①より

$B=2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=2(\sin x+\cos x)=2t$

よって $y=A-B+7=(2t^2-2)-2t+7=2t^2-2t+5$

（4） 三角関数を合成して $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{1}{4}\pi\right)$

ここで，$0\leqq x\leqq \pi$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ だから

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ よって $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) より $y=2t^2-2t+5=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において，y は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる．