解答

（1） $a_{n+1}=2a_n+2$ より

$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$，$a_1+2=2$

よって数列 $\{a_n+2\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列なので

$a_n+2=2\cdot 2^{n-1}$　　よって $a_n=2^n-2$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-2)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-2n=2^{n+1}-2n-2$$

（2） $b_{n+1}=2b_n+a_n=2b_n+2^n-2$

$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}$ より

$$c_{n+1}=\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2b_n+2^n-2}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}=c_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}$$

また，$c_1=\dfrac{b_1}{2^1}=\dfrac{2}{2^1}=1$

数列 $\{c_n\}$ の階差数列が $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}$ だから

$n\geqq 2$ のとき

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right)=1+\frac{1}{2}(n-1)-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$$

$n=1$ のとき $\dfrac{1}{2^{1-1}}+\dfrac{1}{2}\cdot 1-\dfrac{1}{2}=1$

よって，$n=1$ のときも成り立つ．$c_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{2}$

$c_n=\dfrac{b_n}{2^n}$ なので，$b_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+2$

（3） $d_n=b_n-2=(n-1)\cdot 2^{n-1}$ より

$S_n=0\cdot 2^0+1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}$

$2S_n=\qquad 0\cdot 2^1+1\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$

よって $S_n-2S_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-n\cdot 2^n=(2-n)\cdot 2^n-2$

よって $S_n=(n-2)\cdot 2^n+2$

$b_n=d_n+2$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(d_k+2)=\sum_{k=1}^{n} d_k+2n=S_n+2n$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k=(n-2)\cdot 2^n+2+2n$