解答

$2^x = X$ とおくと，$X > 0$ である

（1）$\log_3(-4^x + 5^{x+1} - 16)$ の真数は正だから

$-4^x + 5^{x+1} - 16 > 0$

$4^x - 5^{x+1} + 16 < 0 \cdots$ ①

$X^2 - 10X + 16 < 0 \quad (4^x = X^2,\ 2^{x+1} = 2X)$

$(X-2)(X-8) < 0$ よって $2 < X < 8$　これは $X > 0$ をみたす

$X = 2^x$ なので，$2^1 < 2^x < 2^3$

底 2 は 1 より大きいので，$1 < x < 3$

（2）$t = -4^x + 5^{x+1} - 16 = -X^2 + 10X - 16 = -(X-5)^2 + 9$

$X > 0$ における t のグラフは図の実線部分　(※グラフは省略)

図より，$t \leqq 9$

（3）$y = \log_3(-4^x + 5^{x+1} - 16) = \log_3 t$

(2) より $t \leqq 9$

ここで，底 3 は 1 より大きいので，

$\log_3 t \leqq \log_3 9$　よって $y \leqq 2$

等号が成り立つときは $t = 9$ であり，このときの X の値は (2) より $X = 5$ である．

よって $2^x = 5$　したがって $x = \log_2 5$

$x = \log_2 5$ のとき最大値 2 をとる．

（4）$z = (\log_3 t)^2 - \log_{\sqrt{3}} t$

ここで $\log_{\sqrt{3}} t = \dfrac{\log_3 t}{\log_3 \sqrt{3}} = \dfrac{\log_3 t}{\frac{1}{2}} = 2\log_t$

よって $y = (\log_3 t)^2 - 2\log_3 t = y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$

ここで (2) より $y \leqq 2$ だから，z のグラフは図の実線部分　(※グラフは省略)

図より $y = 1$ のとき最小値 -1 をとる

このとき $y = \log_3 t$ だから $1 = \log_3 t$ より $t = 3$

また，(2) より $t = -X^2 + 10X - 16$ だから

$3 = -X^2 + 10X - 16$

$X^2 - 10X - 16 = 0$

$X = 5 \pm \sqrt{6}$　これは $2 < X < 8$ を満たす

$X = 2^x$ なので $x = \log_2 5 \pm \sqrt{6}$

最小値 -1　このときの x の値 $x = \log_2 5 \pm \sqrt{6}$