

解答

(1) 膨張後のシリンダー内の体積は $S\frac{3}{2}\ell_0$ になる.

$$\text{ボイル・シャルルの法則より, } \frac{p_0 S \ell_0}{T_0} = \frac{p_1 S \frac{3}{2} \ell_0}{2T_0}$$

$$\text{よって } p_1 = \frac{4}{3}p_0$$

(2) 膨張後の, ピストンにおける力の釣り合いより,

$$k \cdot \frac{1}{2} \ell_0 + p_0 S = p_1 S$$

$$(1) \text{ より } p_1 = \frac{4}{3}p_0 \text{ だから, } k = \frac{2}{\ell_0} \left(\frac{4}{3}p_0 S - p_0 S \right) = \frac{2p_0 S}{3\ell_0}$$

(3) 気体が外部にした仕事は, ばねがされた仕事と大気がされた仕事の和と考えることができる.

$$\text{ばねがされた仕事を } W_1 \text{ とすると, } W_1 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2} \ell_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2p_0 S}{3\ell_0} \cdot \frac{1}{4} \ell_0^2 = \frac{p_0 S \ell_0}{12}$$

$$\text{大気がされた仕事を } W_2 \text{ とすると, 定圧変化だから } W_2 = p_0 \Delta V = p_0 S \cdot \frac{1}{2} \ell_0 = \frac{1}{2} p_0 S \ell_0$$

$$\text{よって } W = W_1 + W_2 = \frac{p_0 S \ell_0}{12} + \frac{p_0 S \ell_0}{2} = \frac{7}{12} p_0 S \ell_0$$

(4) 熱力学第一法則より, $\Delta U = Q - W$ よって $Q = \Delta U + W$ (ただし W は気体が外部にした仕事)

$$\text{内部エネルギーの変化 } \Delta U = nC_v \Delta T = nC_v (2T_0 - T_0) = nC_v T_0$$

$$\text{ここで膨張前の状態において, 気体の状態方程式より } p_0 S \ell_0 = nRT_0 \quad \text{よって } nT_0 = \frac{p_0 S \ell_0}{R}$$

$$\text{よって } \Delta U = \frac{C_v p_0 S \ell_0}{R}$$

$$Q = \Delta U + W = \frac{C_v p_0 S \ell_0}{R} + \frac{7}{12} p_0 S \ell_0 = \left(\frac{C_v}{R} + \frac{7}{12} \right) p_0 S \ell_0$$