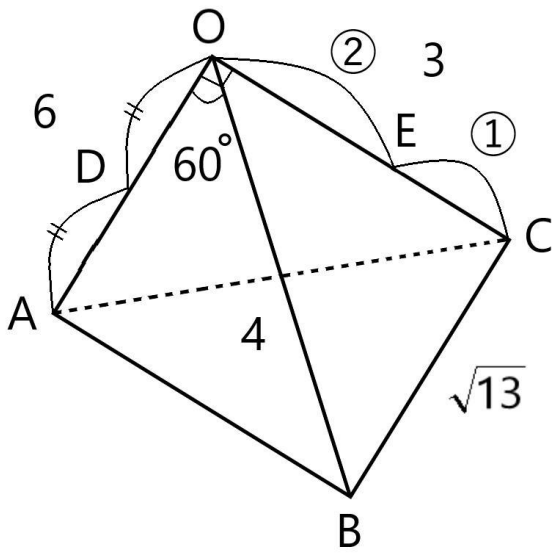
解説



図は大きく丁寧に

問題文にある点はあらかじめ与えられたベクトルで表しておく
（図の役目はだいたいここで終わり）

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

（1）

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB} = 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12$$

$\vec{c}\perp\vec{a}$ より $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

垂直→内積＝0（最重要）

ベクトルの内積
（角度がわかるとき）
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{13}$ だから，$|\vec{c}-\vec{b}| = \sqrt{13}$

両辺 2 乗して $|\vec{b}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 13$

$$4^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 3^2 = 13$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = 6$$

ベクトルの内積
（三角形の3辺の長さがわかるとき）
ベクトルの大きさを2乗してみる
余弦定理よりも計算が楽

（2）

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}$$

ベクトルでは絶対！！
始点をそろえる＝引き算
（図で考えると難しい）

（1）（2）の問題がでないことも多い
問われなくても自分でやっておくこと

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right|^2$

$= \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}\right|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(6^2 - 4\cdot 12 + 4\cdot 4^2\right)$

$= 13$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| > 0$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| = \sqrt{13}$

ベクトルの大きさ(長さ)求める
→ベクトルの大きさを2乗する

$\left|\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right|$
2乗する前に分数でくくる → 計算が楽に

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 = \left|\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right|^2$

$= \frac{1}{9}\left(4\left|\vec{c}\right|^2 - 12\vec{b}\cdot\vec{c} + 9\left|\vec{b}\right|^2\right)$

$= \frac{1}{9}\left(4\cdot 3^2 - 12\cdot 6 + 9\cdot 4^2\right)$

$= 12$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| > 0$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = \sqrt{12}$

内積の計算の仕方
→普通の文字式と同じ
- 異なるベクトル・・・内積の記号(・)省略できない
- 同じベクトル・・・大きさの2乗

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

$= \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right)$

$= \frac{1}{6}\left(2\vec{a}\cdot\vec{c} - 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 6\left|\vec{b}\right|^2\right)$

$= \frac{1}{6}\left(2\cdot 0 - 3\cdot 12 - 4\cdot 6 + 6\cdot 4^2\right)$

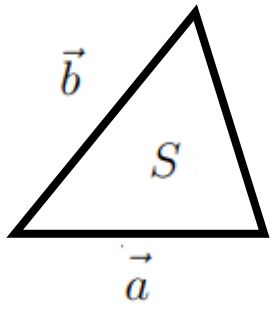
$= 6$

$\triangle\mathrm{BDE} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{13\cdot 12 - 6^2} = \sqrt{30}$

ベクトルと三角形の面積

$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$

$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ より $\sin\theta$ を求めなくていい分早い



公式間違いやすい

(4)

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BD}$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BE}$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

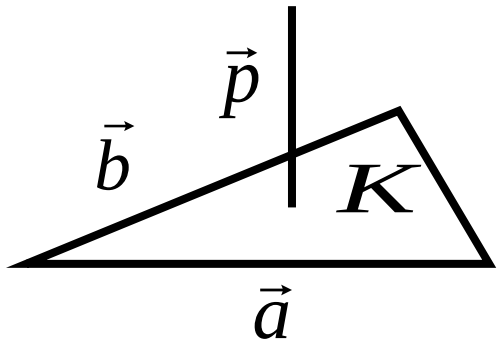
ベクトルと平面の垂直

ベクトル $\vec{p}$ と平面 K が垂直なとき

平面 K 上の任意の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について

$\vec{p} \perp \vec{a}$ かつ $\vec{p} \perp \vec{b}$ が成り立てばよい

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{DE}$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ でもよい.



代入できる形に変形
→始点をそろえる

$\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BE}$ より

$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BD}$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$(x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$x\left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + y\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

ここで $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = -10$

また，(3) の結果より $13x + 6y = 10 \cdots ①$

同様に $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BE}$ より $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

$(x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

$x\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE} + y\left|\overrightarrow{BE}\right|^2 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

ここで $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BE} = \vec{b} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right) = -12$

また，(3) の結果より $x + 2y = 2 \cdots ②$

①②を解いて $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}$

頻出！！
ベクトルの垂直→内積＝0→代入

(2) の結果

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}$

も代入してもよい
今回は(3)の結果が
使える変形を行った

ベクトルは計算量が多く
分数の計算になりやすい
計算ミスに注意
ベクトルは計算問題です！
（図形ではありません）