問題

四面体 OABC において，OA=6，OB=4，OC=3，BC= $\sqrt{13}$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ とする．辺 OA の中点を D，辺 OC を $2:1$ に内分する点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\boxed{\text{アイ}}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=$ $\boxed{\text{ウ}}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{c}-\vec{b}$ である．

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|=\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=$ $\boxed{\text{シ}}$ であり，

三角形 BDE の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である．

(4) 点 O から平面 BDE に下ろした垂線を OP とする．$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=x\overrightarrow{\mathrm{BD}}+y\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=$ $\boxed{\text{ソ}}$ より $\boxed{\text{タチ}}x+\boxed{\text{ツ}}y=\boxed{\text{テト}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=$ $\boxed{\text{ナ}}$ より $x+\boxed{\text{ニ}}y=\boxed{\text{ヌ}}$ が成り立つ．

したがって，$x=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である．