

解答

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ より } \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{13} \text{ だから, } |\vec{c} - \vec{b}| = \sqrt{13}$$

$$\text{両辺 2 乗して } |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 13$$

$$4^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 3^2 = 13$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 6$$

$$(2) \vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{OE} = \frac{2}{3}\vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\vec{BD} = \vec{OD} - \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{BE} = \vec{OE} - \vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}$$

$$(3) |\vec{BD}|^2 = \left| \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right|^2 = \frac{1}{4} \left(|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \right) = \frac{1}{4} (6^2 - 4 \cdot 12 + 4 \cdot 4^2) = 13$$

$$|\vec{BD}| > 0 \text{ より } |\vec{BD}| = \sqrt{13}$$

$$|\vec{BE}|^2 = \left| \frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b} \right|^2 = \frac{1}{9} \left(4|\vec{c}|^2 - 12\vec{b} \cdot \vec{c} + 9|\vec{b}|^2 \right) = \frac{1}{9} (4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 6 + 9 \cdot 4^2) = 12$$

$$|\vec{BE}| > 0 \text{ より } |\vec{BE}| = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{BE}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(2\vec{a} \cdot \vec{c} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 6|\vec{b}|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{6} (2 \cdot 0 - 3 \cdot 12 - 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4^2)$$

$$= 6$$

$$\triangle BDE = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{BD}|^2 |\vec{BE}|^2 - (\vec{BD} \cdot \vec{BE})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{13 \cdot 12 - 6^2} = \sqrt{30}$$

$$(4) \vec{BP} = x\vec{BD} + y\vec{BE} \text{ より}$$

$$\vec{OP} = x\vec{BD} + y\vec{BE} + \vec{OB}$$

$$\vec{OP} \perp \vec{BD} \text{ より } \vec{OP} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$(x\vec{BD} + y\vec{BE} + \vec{OB}) \cdot \vec{BD} = 0$$

$$x|\vec{BD}|^2 + y\vec{BE} \cdot \vec{BD} + \vec{OB} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\text{ここで } \vec{OB} \cdot \vec{BD} = \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) = -10$$

$$\text{また, (3) の結果より } 13x + 6y = 10 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に } \vec{OP} \perp \vec{BE} \text{ より } \vec{OP} \cdot \vec{BE} = 0$$

$$(x\vec{BD} + y\vec{BE} + \vec{OB}) \cdot \vec{BE} = 0$$

$$x\vec{BD} \cdot \vec{BE} + y|\vec{BE}|^2 + \vec{OB} \cdot \vec{BE} = 0$$

$$\text{ここで } \vec{OB} \cdot \vec{BE} = \vec{b} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b} \right) = -12$$

$$\text{また, (3) の結果より } x + 2y = 2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ を解いて } x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{4}{5}$$