解答

（1） $y=3x^2-6x+3$ より $y'=6x-6$

$x=a$ のとき $y'=6a-6$ だから ℓ の方程式は

$y-(3a^2-6a+3)=(6a-6)(x-a)$　　よって $y=(6a-6)x-3a^2+3$

（2） $y=(6a-6)x-3a^2+3$ において $y=0$ より

$0=(6a-6)x-3a^2+3$

$1<a<2$ より $a\fallingdotseq 1$ だから $6a-6\fallingdotseq 0$ なので

$x=\dfrac{3a^2-3}{6a-6}=\dfrac{3(a-1)(a+1)}{6(a-1)}=\dfrac{a+1}{2}$

よって $\mathrm{Q}\left(\dfrac{a+1}{2},\ 0\right)$

放物線 $y=3x^2-6x+3$ と直線 $x=a$，x 軸で囲まれた部分の面積を T_1 とすると，

$T=\displaystyle\int_1^a(3x^2-6x+3)dx=\Big[x^3-3x^2+3x\Big]_1^a=a^3-3a^2+3a-(1-3+3)=(a-1)^3$

点 P から x 軸に垂線を下ろしてその点を R とすると，$\mathrm{R}(a,\ 0)$ だから

三角形 PQR の面積を T_2 とすると，$T_2=\dfrac{1}{2}(3a^2-6a+3)\left(a-\dfrac{a+1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}(a-1)^3$

$S_1=T_1-T_2=(a-1)^3-\dfrac{3}{4}(a-1)^3=\dfrac{1}{4}(a-1)^3$

（3） $S_2=\displaystyle\int_a^2\{3x^2-6x+3-((6a-6)x-3a^2+3)\}dx=\int_a^2 3(x-a)^2dx=\Big[(x-a)^3\Big]_a^2=(2-a)^3$

よって $S=S_1+S_2=\dfrac{1}{4}(a-1)^3+(2-a)^3=\dfrac{-3}{4}a^3+\dfrac{21}{4}a^2-\dfrac{45}{4}a+\dfrac{31}{4}$

$\dfrac{dS}{da}=-\dfrac{9}{4}a^2+\dfrac{21}{2}a-\dfrac{45}{4}=-\dfrac{3}{4}(3a-5)(a-3)$

$\dfrac{dS}{da}=0$ とすると $1<a<2$ だから $a=\dfrac{5}{3}$

S の増減表は次のようになる

a	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dS}{da}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$\frac{1}{9}$	$\nearrow$	

表より $a=\dfrac{5}{3}$ のとき S は最小値 $\dfrac{1}{9}$ をとる