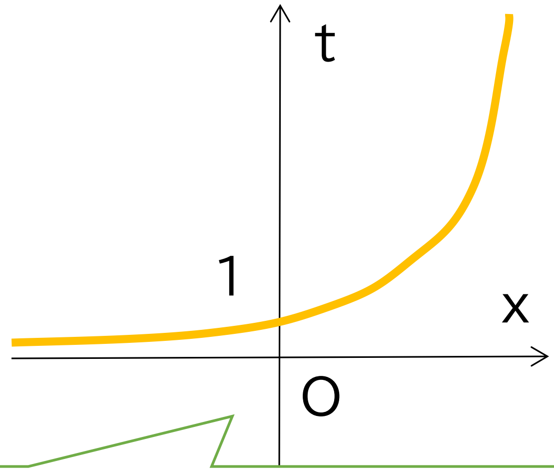
解説

（1） $t=(\sqrt{3})^x$ より $t>0$ である.

頻出：慣れていないと何を問われているのかわからないので注意

指数関数の定義域
$y=a^x$ （ただし$a>0$, $a\neq1$)のとき
xが実数全体なら$y>0$



グラフから$t>0$といってもよい

（2） $3^{x+2}=3^x\cdot3^2=\{(\sqrt{3})^2\}^x\cdot9=\{(\sqrt{3})^x\}^2\cdot9=t^2\cdot9=9t^2$

指数の問題で一番ミスが出やすい！！
とにかく丁寧に計算すること！！
項ごとに分けて計算するとミスが少なく時間短縮になる

$f(x)=9t^2-10t+1$
$f(x)>0$ のとき, $9t^2-10t+1>0$
$(9t-1)(t-1)>0$
$t<\frac{1}{9}$, $1<t$
$(\sqrt{3})^x<\frac{1}{9}$, $1<(\sqrt{3})^x$
$\frac{1}{9}=3^{-2}=\{(\sqrt{3})^2\}^{-2}=(\sqrt{3})^{-4}$
$1=(\sqrt{3})^0$ だから
$(\sqrt{3})^x<(\sqrt{3})^{-4}$, $(\sqrt{3})^0<(\sqrt{3})^x$

指数方程式・不等式(2次式)
$a^x=t$とおく
→tの2次方程式(不等式)

ここも計算は丁寧に

$a^{○○○}>a^{△△△}$の形に変形

指数不等式(最終形)
$a^{○○○}>a^{△△△}$
- a(底)が1より大きいとき
 →○○○>△△△(不等号そのまま)
- a(底)が1より小さいとき
 →○○○<△△△(不等号逆になる)

底 $\sqrt{3}$ は1より大きいので
$x<-4$, $0<x$

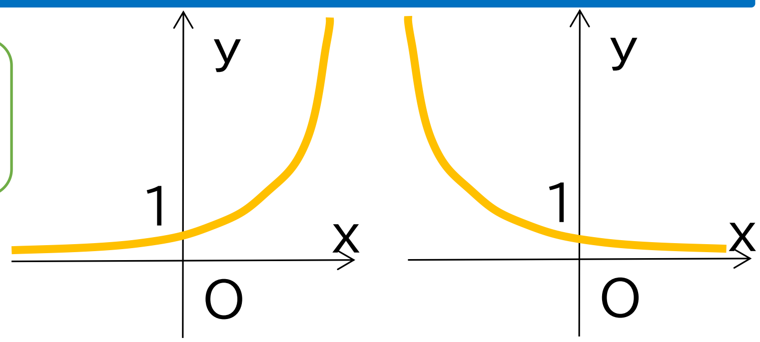
(3) $g(x) = 3 \cdot (\sqrt{3})^x = (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3})^x = (\sqrt{3})^{x+2}$

$y = g(x)$ のグラフは $y = 3^x$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したものである. ③

この問題では
$f(x) = (\sqrt{3})^x$
$a = -2,\ b = 0$

$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動したグラフの方程式
$y - b = f(x - a)$

グラフの形状を覚えよう



y=a^x (a>1)　　y=a^x (0<a<1)

(4)

$g(x) = 3 \cdot (\sqrt{3})^x = 3t$ なので

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{9t^2 - 10t + 1}{3t} = 3t - \frac{10}{3} + \frac{1}{3t}$$

逆数(のような)関係
→相加･相乗

ここで, $t > 0$ であるから,
相加平均・相乗平均の関係より

$$3t + \frac{1}{3t} \geqq 2\sqrt{3t \cdot \frac{1}{3t}} = 2$$

$$3t + \frac{1}{3t} - \frac{10}{3} \geqq -\frac{4}{3}$$

後から両辺 $-\dfrac{10}{3}$

$$h(x) \geqq -\frac{4}{3}$$

相加平均・相乗平均の関係
$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき
$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$
等号成立は $a = b$ のとき

よって $h(x)$ の最小値は $-\dfrac{4}{3}$

等号成立は $3t = \dfrac{1}{3t}$ より $t = \dfrac{1}{3}$　($t > 0$ より)

$(\sqrt{3})^x = \dfrac{1}{3}$ より $x = -2$

$x = -2$ のとき最小値 $\dfrac{-4}{3}$ をとる.

a^x(指数)は常に正の値
→相加･相乗と相性がいい
頻出(忘れたころにやって来る)

最小値を取るときは等号が成り立つ