解答

（1） $t=(\sqrt{3})^x$ より $t>0$ である．

（2） $3^{x+2}=9\cdot\{(\sqrt{3})^x\}^2=9t^2$ なので，

$f(x)=9t^2-10t+1$

$f(x)>0$ のとき，$9t^2-10t+1>0$

$(9t-1)(t-1)>0$

$t<\frac{1}{9}$，$1<t$

$(\sqrt{3})^x<\frac{1}{9}$，$1<(\sqrt{3})^x$

底 $\sqrt{3}$ は 1 より大きいので

$x<-4$，$0<x$

（3） $g(x)=3\cdot(\sqrt{3})^x=(\sqrt{3})^{x+2}$ より

$y=g(x)$ のグラフは $y=(\sqrt{3})^x$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したものである．③

（4） $g(x)=3\cdot(\sqrt{3})^x=3t$ なので

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{9t^2-10t+1}{3t}=3t-\frac{10}{3}+\frac{1}{3t}$$

ここで，$t>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$$3t+\frac{1}{3t}\geqq 2\sqrt{3t\cdot\frac{1}{3t}}=2$$

$$3t+\frac{1}{3t}-\frac{10}{3}\geqq -\frac{4}{3}$$

$$h(x)\geqq -\frac{4}{3}$$

よって $h(x)$ の最小値は $-\frac{4}{3}$

等号成立は $3t=\frac{1}{3t}$ より $t=\frac{1}{3}$ $\quad(t>0$ より$)$

$(\sqrt{3})^x=\frac{1}{3}$ より $x=-2$

$x=-2$ のとき最小値 $\frac{-4}{3}$ をとる．