

## 解答

(1) 半角の公式より  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2} \dots$  (ア),  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos \theta}{2} \dots$  (イ)

2倍角の公式より  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \dots$  (ウ)

(2) 三角関数の合成より  $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$

$0 \leq x \leq \pi$  より  $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$

よって  $-\frac{1}{2} \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$

$-1 \leq 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$

$-1 \leq t \leq 2$

(3)  $t = \sqrt{3} \sin x + \cos x$  の両辺を2乗して

$$\begin{aligned} t^2 &= 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 3 \times \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= -\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 2 \end{aligned}$$

よって  $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = t^2 - 2$  だから

$y = t^2 - 2 - 2t = t^2 - 2t - 2$

(4) (3) より  $y = (t - 1)^2 - 3$  であり, (2) より  $-1 \leq t \leq 2$  だから

$t = -1$  のとき最大値  $1$ ,  $t = 1$  のとき最小値  $-3$  をとる.

よって最小値をとるとき,

$$2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$  だから

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$x = 0, \frac{2}{3}\pi$$

よって大きいほうの  $x$  は  $\frac{2}{3}\pi$

### 半角の公式

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

### 2倍角の公式

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$